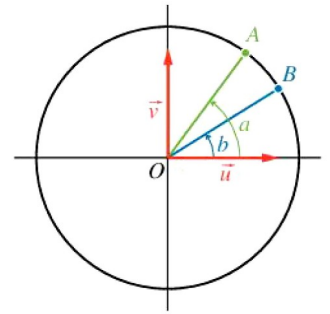


05-02 Activité

On munit le plan réel du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points images A et B du cercle trigonométrique.

Soient a et b leurs affixes respectives.



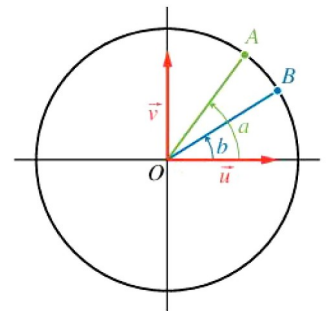
1. a] Exprimer le produit scalaire $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$ en fonction de $\cos(a - b)$.
 b] À l'aide des coordonnées de $\vec{OB}$ et $\vec{OA}$, exprimer $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$ en fonction de a et b .
 c] En déduire l'expression de $\cos(a - b)$ en fonction de a et b .
2. En appliquant cette expression aux nombres a et $(-b)$, exprimer $\cos(a + b)$ en fonction de a et b .
3. a] Exprimer $\cos(\pi/2 - x)$ en fonction de x .
 b] Poser $x = a - b$ pour exprimer $\sin(a - b)$ en fonction de a et b .
4. Exprimer $\sin(a + b)$ en fonction de a et b .

05-02 Activité

On munit le plan du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points images A et B du cercle trigonométrique.

Soient a et b leurs affixes respectives.



1. a] Exprimer le produit scalaire $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$ en fonction de $\cos(a - b)$.
 b] À l'aide des coordonnées de $\vec{OB}$ et $\vec{OA}$, exprimer $\vec{OB} \cdot \vec{OA}$ en fonction de a et b .
 c] En déduire l'expression de $\cos(a - b)$ en fonction de a et b .
2. En appliquant cette expression aux nombres a et $(-b)$, exprimer $\cos(a + b)$ en fonction de a et b .
3. a] Exprimer $\cos(\pi/2 - x)$ en fonction de x .
 b] Poser $x = a - b$ pour exprimer $\sin(a - b)$ en fonction de a et b .
4. Exprimer $\sin(a + b)$ en fonction de a et b .

05-02 Formules d'addition et de duplication

Propriété – Formules d'addition

Pour tout couple de réels $(a ; b)$ on a :

- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Remarque

« Cosinus est un égoïste compliqué ». (citation anonyme)

Démonstrations

1. Utiliser les formules d'addition pour exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.
2. Utiliser les formules d'addition pour exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.
3. Utiliser la relation entre $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ pour exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$.
4. Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\sin(a)$.

Propriété – Formules de duplication

Pour tout réel a on a :

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$

05-02 Applications du cours**Application 1**

Déterminer les valeurs suivantes.

a] $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c] $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

b] $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

d] $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)$

Application 2

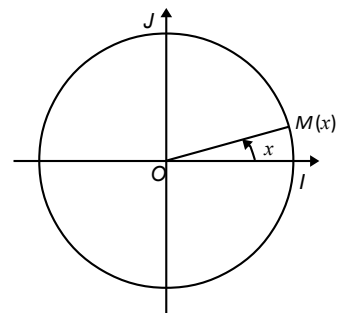
1. Exprimer $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. En déduire les solutions, dans $]-\pi ; \pi[$, de l'équation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = -1$.

Application 3

Déterminer deux réels positifs A et α avec $\alpha < 2\pi$ tels que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = A \sin(x + \alpha)$.

Application 4

1. Sur le cercle trigonométrique, ci-contre, on a placé le point-image de l'angle x . Placer les points-image des angles $\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.
2. Conjecturer la valeur de $\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ puis vérifier.

**Application 5**

1. a] Déterminer les réels A et B tels que, pour tout réel x , on a : $\cos(3x) = A\cos^3(x) + B\cos(x)$.
b] Déterminer les réels A et B tels que, pour tout réel x , on a : $\sin(3x) = A\sin^3(x) + B\sin(x)$.
2. Déterminer une équation polynomiale de degré 3 dont $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est une solution.